整礎集合上の部分関数の有限微分閉包について(計算アルゴリズムの基礎理論)

西澤, 輝泰

数理解析研究所講究録
625巻 1987年 71-79

整礎集合上の部分関数の有限微分閉包について

新潟大学経済学部　西澤輝泰
(Teruyasu Nishizawa)

§0. はじめに

与えられた部分関数 ω から，それが含む帰納的構造を抽出しこれを拡張して ω の自然な拡張である関数 $\tilde{\omega}$ を得ようとすることは，帰納的推論の本質的要素であろう。帰納的構造は単純なものから複雑なものまで種々あり得るが，本論文では，最も単純なものとして有限木オートマトン的な構造を抽出する方法を提示する。

§1. 部分関数に関する記法

部分関数 $\varphi : A \to B$ について，φ の定義域を $D(\varphi)$ で表す。即ち $D(\varphi) = \{ x \in A ; (\exists y \in B)\ \varphi(x) = y \}$ である。

$X \subset A$ に対し，$\varphi(X) = \{ y \in B ; (\exists x \in X \cap D(\varphi))\ \varphi(x) = y \}$ とおく。また，$y \in B$ に対し，$\varphi^{-1}(y) = \{ x \in D(\varphi) ; \varphi(x) = y \}$ とし，$Y \subset B$ に対し，$\varphi^{-1}(Y) = \bigcup_{y \in Y} \varphi^{-1}(y)$ とする。

2つの部分関数 φ, ψ について,

$$(\forall x \in D(\varphi))\,[\,x \in D(\psi) \wedge \varphi(x) = \psi(x)\,]$$

となっているとき, φ は ψ の制限, ψ は φ の拡張であるといい, $\varphi \sqsubset \psi$ と表す。

空でない集合 W について, $W \to W^m$ の部分関数すべてからなる族を $\Pi_m(W)$ で表す。$m=0$ も許容し, W^0 は仮空の要素 ε 唯1つからなる集合 $\{\varepsilon\}$ であるとする。$\vec{f} \in \Pi_m(W)$ について, m を $d(\vec{f})$ で表す。

$\vec{f} = (f_1, \cdots, f_m)$ は,

$$d(\vec{f}) = m \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} [\,f_i \in \Pi_1(W) \wedge D(f_i) = D(\vec{f})\,]$$
$$\wedge\ (\forall x \in D(\vec{f}))\ \vec{f}(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$$

なることを表す。

$$\Pi(W) = \bigcup_{m=0}^{\infty} \Pi_m(W)$$ とおく。

§2. 部分関数による部分関数の微分

集合 W 上の部分関数 ω が $\vec{f} \in \Pi(W)$ により微分可能とは,

$$(\forall x, y \in D(\vec{f}) \cap D(\omega))\,[\,\vec{f}(x) = \vec{f}(y) \longrightarrow \omega(x) = \omega(y)\,]$$

が成り立つことをいう。次のことが明らかである。

(1) $\vec{f}$ が1対1なら, 任意の ω が $\vec{f}$ により微分可能。

(2) $\vec{f}$ が $D(\vec{f}) \cap D(\omega)$ 上一定値をとるならば, ω も

$D(\vec{f}) \cap D(\omega)$ 上一定値をとるとき，かつそのときに限り ω は $\vec{f}$ により微分可能である。

部分関数 $\omega : \overline{W} \to A$ が $\vec{f} \in \Pi_m(\overline{W})$ により微分可能であるとき，その微分 $\partial_{\vec{f}}\,\omega$ は $\overline{W}^m \to A$ の部分関数として次のように定められる。

$$(\partial_{\vec{f}}\,\omega)(\vec{x}) = a \longleftrightarrow (\exists y \in D(\vec{f}) \cap D(\omega))\,[\,\vec{f}(y) = \vec{x} \wedge \omega(y) = a\,]$$

即ち，$D(\partial_{\vec{f}}\,\omega) = \vec{f}(D(\omega))$ であり，$\vec{x} \in D(\partial_{\vec{f}}\,\omega)$ に対し $\{\partial_{\vec{f}}\,\omega(\vec{x})\} = \omega(\vec{f}^{-1}(\vec{x}))$ である。ω が関数でかつ $\vec{f}$ が onto であれば $\partial_{\vec{f}}\,\omega$ も関数になる。

ω が $\vec{f} \in \Pi_0(\overline{W})$ で微分可能のときは，$\partial_{\vec{f}}\,\omega$ は未定義要素または定数であって，$\{\partial_{\vec{f}}\,\omega\} = \omega(D(\vec{f}))$ である。

§3. 場合分け変換

$\mathfrak{F} \subset \Pi(\overline{W})$ について，次の(1)，(2)が成りたつとき，$\mathfrak{F}$ は $\overline{W}$ 上の場合分け変換であるという。

(1) $\mathfrak{F}$ は有限集合

(2) $\{D(\vec{f})\,;\ \vec{f} \in \mathfrak{F}\}$ が $\overline{W}$ の分割を構成する。即ち，

$$(\forall \vec{f} \in \mathfrak{F})\ D(\vec{f}) \neq \phi \ \wedge\ \bigcup_{\vec{f} \in \mathfrak{F}} D(\vec{f}) = \overline{W}$$

$$\wedge\ (\forall \vec{f}, \vec{g} \in \mathfrak{F})\,[\,\vec{f} \neq \vec{g} \longrightarrow D(\vec{f}) \cap D(\vec{g}) = \phi\,].$$

特に $\overline{W}$ が半順序 $\prec$ に関して整礎集合で，任意の $\vec{f} \in \mathfrak{F}$ について $\vec{f} = (f_1, \cdots, f_m)$ とするとき，

$\bigwedge_{i=1}^{m} (\forall x \in D(\vec{f}))\ f_i(x) \precneqq x$ が成り立つならば，

$\mathfrak{F}$ は場合分け降下変換である，という。

$\mathfrak{W}$ 上の部分関数 ω が $\mathfrak{W}$ 上の場合分け変換 $\mathfrak{F}$ により微分可能である，とは ω が $\mathfrak{F}$ の任意の元により微分可能であることをいう。このとき，

$$\bigvee_{\vec{f} \in \mathfrak{F}} (x \in D(\vec{f}) \wedge \omega(x) = (\partial_{\vec{f}}\omega)(\vec{f}(x)))$$

が任意の $x \in D(\omega)$ について成り立つ。

§4. 部分関数の有限微分閉包

H を $A^m \to A$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ の関数からなる有限集合とする。$\mathfrak{W} \to A$ の部分関数 $\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n$ と $\mathfrak{W}$ 上の場合分け変換 $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \cdots, \mathfrak{F}_n$ とからなる系

$\Gamma = \{H ; \omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n ; \mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \cdots, \mathfrak{F}_n\}$ は次のことが成り立つとき有限微分閉包をなす，という。即ち，

各 $i = 0, 1, \cdots, n$ について ω_i が $\mathfrak{F}_i$ で微分可能で，任意の $\vec{f} \in \mathfrak{F}_i$ に対し，$d(\vec{f}) = m$ とするとき，H の元 $h: A^m \to A$ と番号 $j_1, \cdots, j_m \in \{0, 1, \cdots, n\}$ が存在して，任意の $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in \vec{f}(D(\omega_i))$ に対し，

$(\partial_{\vec{f}}\omega_i)(\vec{x}) = h(\omega_{j_1}(x_1), \cdots, \omega_{j_m}(x_m))$ となる。

この関係を $\partial_{\vec{f}}\omega_i = h\langle\omega_{j_1}, \cdots, \omega_{j_m}\rangle$ と略記する。

ここでもし $\mathfrak{W}$ が整礎集合で，$\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \cdots, \mathfrak{F}_n$ が

場合分け降下変換であるときは，Γ は停止性の有限微分閉包をなすという。

さて，$\Gamma=\{H;\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n;\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_1,\cdots,\mathcal{F}_n\}$ を停止性の有限微分閉包とする。このとき，

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\bigvee_{\vec{f}\in\mathcal{F}_i}\left(x\in D(\vec{f})\wedge\widetilde{\omega}_i(x)=h(\widetilde{\omega}_{j_1}(f_1(x)),\cdots,\widetilde{\omega}_{j_m}(f_m(x)))\right) \\ \qquad\qquad\text{（ただし，}\vec{f}=(f_1,\cdots,f_m)\text{，}\partial_{\vec{f}}\,\omega_i=h\langle\omega_{j_1},\cdots,\omega_{j_m}\rangle\text{）} \end{array}\right\}_{i=0}^{n}$$

なる事により，（もし $d(\vec{f})=0$ なる任意の $\vec{f}$ に対し $\partial_{\vec{f}}\omega_i$ が未定義でなければ）$\widetilde{W}$ 上の関数 $\widetilde{\omega}_0,\widetilde{\omega}_1,\cdots,\widetilde{\omega}_n$ が定まり，明らかに $\bigwedge_{i=0}^{n}(\omega_i\sqsubset\widetilde{\omega}_i)$ である。この $\widetilde{\omega}_0,\widetilde{\omega}_1,\cdots,\widetilde{\omega}_n$ を，$\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n$ から Γ によって定まる関数である，という。もし $\mathcal{F}_0,\cdots,\mathcal{F}_n$ の元と H の元の計算法が与えられていれば上記の事は $\widetilde{\omega}_0,\widetilde{\omega}_1,\cdots,\widetilde{\omega}_n$ を計算する再帰プログラムである。$\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n$ が関数である場合は，これらを計算する再帰プログラムである。

§5. 部分関数の木集合による表現

$\Gamma=\{H;\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n;\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_1,\cdots,\mathcal{F}_n\}$ を停止性の有限微分閉包とする。$\mathcal{F}=\bigcup_{i=0}^{n}\mathcal{F}_i$ とおく。$\mathcal{F}$ の元を節点の名札とし，$\vec{f}$ を名札とする節点の子の個数が $d(\vec{f})$ に等しいような有限木すべての集合を $T_{\mathcal{F}}$ とする。$\tau\in T_{\mathcal{F}}$ について，

τ の root の名札を root(τ), また τ の高さを height(τ) で表すとして, $i=0,1,\cdots,n$ に対し $T_{\mathcal{F}}$ の部分集合 T_i を次により定める。ただしここで, $\tau\in T_{\mathcal{F}}$, root(τ)$=\vec{f}$, $d(\vec{f})=m$ とする。

(1) height(τ)$=0$ (即ち $m=0$) のとき.

$$\tau\in T_i \longleftrightarrow \vec{f}\in\mathcal{F}_i$$

(2) height(τ)>0 (即ち $m>0$) のとき.

$\tau=\vec{f}<\tau_1,\cdots,\tau_m>$, root$(\tau_j)=\vec{f}_j$ $(j=1,\cdots,m)$,

$\partial_{\vec{f}}\,\omega_i=h<\omega_{k_1},\cdots,\omega_{k_m}>$ として,

$$\tau\in T_i \longleftrightarrow \bigwedge_{j=1}^{m}\tau_j\in T_{k_j}$$

即ち, $T_0,T_1,\cdots,T_n$ は, $\mathcal{V}_i=\{\vec{f}\in\mathcal{F}_i\,;\,d(\vec{f})=0\}$ とおいて, 木集合方程式系

$$\left.\begin{array}{l} i=0 \\ \\ T_i=\bigcup_{\vec{f}\in\mathcal{F}_i}\vec{f}<T_{k_1},\cdots,T_{k_m}>\cup\mathcal{V}_i \\ \quad(\text{ただし}, d(\vec{f})=m,\ \partial_{\vec{f}}\,\omega_i=h<\omega_{k_1},\cdots,\omega_{k_m}>) \\ \\ n \end{array}\right\}$$

の唯一解として定まる正規木集合である。

さて, Γ による $\omega_i(x)$ の計算過程は次により定められる木 $rep_i(x)\in T_{\mathcal{F}}$ により表現される。ただし $x\in D(\omega_i)$ とする。

(1) $x\in D(f)$, $\vec{f}\in\mathcal{F}_i$, $d(\vec{f})=0$ のとき.

$rep_i(x) = \vec{f}$

(2) $x \in D(\vec{f})$, $\vec{f} \in \mathcal{F}_i$, $d(\vec{f}) = m > 0$ のとき.

$$rep_i(x) = \vec{f} < rep_{k_1}(f_1(x)), \cdots, rep_{k_m}(f_m(x))>$$

(ただし, $\vec{f} = (f_1, \cdots, f_m)$, $\partial_{\vec{f}}\omega_i = h<\omega_{k_1}, \cdots, \omega_{k_m}>$)

$\widetilde{T}_i = \{ rep_i(x) \ ; \ x \in D(\omega_i) \}$ とおく。 $\widetilde{T}_i$ は部分関数 ω_i を表現する木集合である。 $\widetilde{T}_i \subset T_i$ は明らかであるが, 特に $\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n$ が関数であって, $\underbrace{,}_{d(\vec{f})>0 \text{なる}}$すべての $\vec{f} \in \mathcal{F}$ が onto である場合は $\partial_{\vec{f}}\omega_j$ が関数であるので $\widetilde{T}_i = T_i$ となって, ω_i は正規木集合により表現される。更にこのとき A が有限集合であれば, 任意の $a \in A$ について $\widetilde{T}_i^a = \{ rep_i(x) \ ; \ x \in \omega_i^{-1}(a) \}$ も正規木集合となる。

§6. 単純微分閉包

停止性の有限微分閉包 $\Gamma = \{ H ; \omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n ; \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_n \}$ において, $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_1 = \cdots = \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$ であり, かつ $d(\vec{f}) > 0$ なる任意の $\vec{f} \in \mathcal{F}$ が onto であるとき, Γ は単純微分閉包であるといい, $\Gamma = \{ H ; \omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n ; \mathcal{F} \}$ と略記する。このとき, §4 の $\widetilde{\omega}_0, \widetilde{\omega}_1, \cdots, \widetilde{\omega}_n$ を計算する再帰プログラムは, root-to-frontier の出力つき木オートマトンとみなせる。即ち,

(1) このオートマトンの状態は $\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_1, \cdots, \tilde{\omega}_n$.

(2) $\vec{f} \in \mathcal{F}, \ d(\vec{f}) = m, \ \partial_{\vec{f}}\omega_i = h < \omega_{k_1}, \cdots, \omega_{k_m} >$ とすると，計算状況の遷移は次のようになる。

$m > 0$ のとき，

$$(\tilde{\omega}_i, \vec{f} < \tau_1, \cdots, \tau_m >) \xrightarrow[\text{出力} h]{} \{ (\tilde{\omega}_{k_1}, \tau_1), \cdots, (\tilde{\omega}_{k_m}, \tau_m) \}$$

$m = 0$ のとき，

$$(\tilde{\omega}_i, \vec{f}) \xrightarrow[\text{出力} h]{} \cdot$$ （即ち h を出力して停止する。）

特に，任意の $\vec{f} \in \mathcal{F}$ について $d(\vec{f}) \leqq 1$ のときは，この遷移を次のように表して全体を図示することができる。即ち，

$d(\vec{f}) = 1$ なる $\vec{f} \in \mathcal{F}$ に対し，$\partial_{\vec{f}}\omega_i = h < \omega_j >$ として，

$\tilde{\omega}_i \xrightarrow[\vec{f}/h]{} \tilde{\omega}_j$ ；また $d(\vec{f}) = 0$ なら，$\tilde{\omega}_i \xrightarrow[\vec{f}/h]{} \cdot$

今，特にアルファベット Σ をとって $\mathcal{W} = \Sigma^*$ とし，$\mathcal{F}$ を，

$\mathcal{F} = \{\mathrm{null}\} \cup \{f_\sigma ; \sigma \in \Sigma\}$; $d(\mathrm{null}) = 0$, $D(\mathrm{null}) = \{\varepsilon\}$,

$d(f_\sigma) = 1$, $D(f_\sigma) = \sigma \cdot \Sigma^*$, $f_\sigma(\sigma \cdot x) = x$ なるものとすると，$\mathcal{W}$ 上の任意の部分関数は $\mathcal{F}$ で微分可能である。このとき，$\partial_{\mathrm{null}}\omega$ を $\partial_\varepsilon \omega$ で，また $\partial_{f_\sigma}\omega$ を $\partial_\sigma \omega$ で表し，$\partial_{\sigma_k}(\partial_{\sigma_{k-1}}(\cdots (\partial_{\sigma_1}(\partial_\varepsilon \omega)) \cdots))$ を $\partial_{\sigma_1 \cdots \sigma_k}\omega$ と表す。更にこのとき，アルファベット Δ に対し，$A = \Delta^*$ とし，$\tilde{\Delta}^* = \{h_y ; y \in \Delta^*\}$; $h_y(z) = yz$ とおいて，単純微分関係 $\Gamma = \{H ; \omega_0, \cdots, \omega_n ; \mathcal{F}\}$ を $H \subset \tilde{\Delta}^* \cup \{\varepsilon\}$（ただし任意の $\omega : \mathcal{W} \to A$ に対し，$\partial_\varepsilon \omega = \varepsilon$）なるように

定めると，Γ の定める再帰プログラムは一般系列機械（gsm）になる。即ち，$\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_1, \cdots, \tilde{\omega}_n$ は gsm 写像となる。また，W と $\tilde{W}$ をこれと同じにとり，A を有限集合とし，$H = A \cup \{id\}$（ただし id は $A \to A$ の恒等写像）とすると，単純微分閉包 Γ の定める再帰プログラムは Moore 型系列機械（状態のみに依存する出力を出す有限オートマトン）で，状態 $\tilde{\omega}_i$ での出力は $\partial_\varepsilon \omega_i$ である。（$\partial_\varepsilon \omega_i$ が未定義の場合は，任意に値を設定すればよい。）このとき任意の関数 $\omega : \Sigma^* \to A$ と任意の $x \in \Sigma^+$，$y \in \Sigma^*$ に対し，$(\partial_x \omega)(y) = \omega(xy)$，$\partial_\varepsilon \omega = \omega(\varepsilon)$ である。

参考文献

1. T. Nishizawa, Automaton Programs and Regular Functional Expressions – On An Extension of Derivatives, Bull. Informatics and Cybernetics, vol.21, No. 1~2. Research Assoc. of Statistical Sci., 1984
2. 西澤輝泰，述語の微分について（その3），京大数理解析研究所講究録 591号，1986
3. 西澤輝泰，述語の微分について，電子通信学会技術研究報告，vol. 86，No. 60（コンピュテーション研究会），1986